

# MAT 2742 - Correction du Devoir Maison 1

Allan Merino

## Exercice 1

1. Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $A_m$  la matrice de  $\text{Mat}(3 \times 3)$  donnée par

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m^2 - 2 & 0 \\ 5 & 0 & m \end{pmatrix}$$

On calcule  $\det(A_m)$ . On développe par rapport à la deuxième ligne. On a

$$\det(A_m) = (m^2 - 2) \det \begin{pmatrix} m & 1 \\ 5 & m \end{pmatrix} = (m^2 - 2)(m^2 - 5) = (m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2})(m - \sqrt{5})(m + \sqrt{5}).$$

En utilisant que  $A_m$  est inversible si et seulement si  $\det(A_m) \neq 0$ . Ainsi,  $A_m$  est inversible si et seulement si  $m \in \{\pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{5}\}$ .

2. Soient A et B les matrices de  $\text{Mat}(3 \times 3)$  données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a  $\det(A) = -1 = \det(B)$ , et donc A et B sont inversibles. Or

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $\det(A + B) = 0$ , i.e.  $A + B$  n'est pas inversible.

3. On peut voir cela de deux manières. Si on garde les notations de la Question 1, on obtient que  $\det(A_3) \neq 0$ . En particulier,  $A_3$  est inversible et donc les vecteurs colonnes de  $A_3$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , i.e.  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On peut aussi le montrer directement. Tout d'abord, puisque la dimension de  $\mathbb{R}^3$  est 3, il suffit de montrer que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tel que  $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ . On obtient donc le système

$$\begin{cases} 3a + c & = 0 \\ 7b & = 0 \\ 5a + 3c & = 0 \end{cases}$$

Ceci implique donc que  $b = 0$ . De la première équation, on obtient que  $c = -3a$  et en remplaçant  $c$  par sa valeur dans la troisième équation, on obtient que  $-a = 0$ , i.e.  $a = 0$ . Ainsi,  $c = 0$  et donc  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

4. Soit A la matrice de  $\text{Mat}(2 \times 2)$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique  $P_A$  de  $A$  est donné par

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

et donc  $\text{Spec}(A) = \{1, 3\}$ . Ainsi, d'après le Corollaire 2.5.7. du cours, on obtient que  $A$  est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible  $P$  tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour déterminer  $P$ , il suffit de déterminer les espaces propres  $V_1$  et  $V_3$  correspondant aux valeurs propres 1 et 3. On a :

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + 2y = x \\ 3y = y \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 3y = 3y \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ y = y \end{cases} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on vérifie facilement que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 2

- Le but ici est de résoudre le système suivant en utilisant le pivot de Gauss et la méthode de Cramer

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 5x + 2y - 3z = -5 \\ -3x - y - 2z = -1 \\ 5x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Commençons par le pivot de Gauss. On écrit le système sous forme matricielle :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

On écrit la matrice associée au système sous forme échelonnée réduite :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
L_2 &\leftarrow L_2 + \frac{3}{5}L_1 && \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{19}{5} & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \\
L_1 &\leftarrow \frac{1}{5}L_1, L_2 \leftarrow 5L_2, L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -19 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
L_1 &\rightarrow L_1 - \frac{2}{5}L_2 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & -19 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
L_1 &\rightarrow L_1 - 7L_3 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & -19 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
L_2 &\rightarrow L_2 + 197L_3 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que l'unique solution  $\mathcal{S}$  est le point

$$\begin{pmatrix} -21 \\ 56 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Utilisons à présent la méthode de Cramer. On commence par calculer le déterminant de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 5 \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 5(1 + 4) - 2(3 + 10) - 3(-6 + 5) = 2
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $\det(A) \neq 0$ , la matrice A est inversible et donc le système linéaire admet une

unique solution. Soit  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . On note par  $A_b^1, A_b^2$  et  $A_b^3$  les matrices de  $\text{Mat}(3 \times 3)$  définies par

$$A_b^1 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_b^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_b^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule à présent les déterminantes des matrices  $A_b^1, A_b^2$  et  $A_b^3$ . On a :

$$\begin{aligned}
\det(A_b^1) &= -5 \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -5(1 + 4) - 2(1 + 6) - 3(-2 + 3) = -42,
\end{aligned}$$

$$\det(A_b^2) = 5 \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 5(1 + 6) + 5(3 + 10) - 3(-9 + 5) = 112,$$

$$\begin{aligned} \det(A_b^3) &= 5 \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 5(-3 + 2) - 2(-9 + 5) - 5(-6 + 5) = 8 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le Théorème 6, on obtient que l'unique solution du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\det(A_b^1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_b^2)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_b^3)}{\det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-42}{2} \\ \frac{112}{2} \\ \frac{8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 56 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. On s'intéresse aux solutions, en fonction de  $m$ , du système suivant :

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}.$$

On utilise pour cela la méthode du pivot. On écrit tout d'abord le système sous forme matricielle

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

On a :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 0 \end{array} \right)$$

Si  $m = 1$ , on voit que les deuxièmes et troisièmes lignes du système ne contiennent que des 0, et donc les solutions du système sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons donc que  $m \neq 1$ . On a :

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & 0 \end{array} \right)$$

— Si  $m \neq -2$ , on obtient donc que  $(1-m)(m+2) \neq 0$  et la troisième équation nous donne que  $(1-m)(m+2)z = 0$ , i.e.  $z = 0$ . La deuxième ligne du système nous donne que  $(m-1)y + (1-m)z = 0$ , i.e.  $(m-1)y = (m-1)z = 0$ , et donc  $y = 0$  car  $z = 0$  et  $m \neq 1$ . Finalement, la première ligne du système nous donne  $x + y + mz = 0$ , i.e.  $x = 0$  puisque  $y = z = 0$ . Finalement, l'unique solution du système dans le cas  $m \neq 1, m \neq -2$  est le vecteur nul.

— Si  $m = -2$ , on obtient alors le système :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions du système est donné par

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x = y, y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 3

Soit  $A$  la matrice de  $\text{Mat}(3 \times 3)$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Le polynôme caractéristique  $P_A$  de  $A$  est donné par

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ -2 & 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 - \lambda) \cdot ((-1 - \lambda)^2 - 4 \cdot 2) - 2 \cdot (0 \cdot (-1 - \lambda) - 2 \cdot (-2)) \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 1 \end{aligned}$$

On voit facilement que  $P_A(1) = 0$  et  $P'_A(1) \neq 0$ . Il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$ . On voit facilement que  $a = 4$  et  $b = -1$ . Ainsi,

$$P_A = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda - 1).$$

Le discriminant du polynôme  $\lambda^2 + 4\lambda - 1$  est  $\Delta = 20$ . Les racines de  $\lambda^2 + 4\lambda - 1$  sont donc  $\frac{-4 - \sqrt{20}}{2}$  et  $\frac{-4 + \sqrt{20}}{2}$ , i.e.  $-2 - \sqrt{5}$  et  $-2 + \sqrt{5}$ . Ainsi, en utilisant le Corollaire 2.5.7, on obtient que  $A$  est diagonalisable.

**Remarque :** On pouvait calculer le déterminant de manière un peu différente. On peut ajouter des lignes ou des colonnes de manière à ce que le déterminant de la matrice reste inchangé. On a :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \text{Id}_3) &= \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ -2 & 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 1 - \lambda & -1 - \lambda & 2 \\ 1 - \lambda & 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & -3 - \lambda & 2 \\ 1 - \lambda & 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1+\lambda)(3+\lambda) - 4) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 1)
\end{aligned}$$

2. Pour déterminer la matrice P, il faut déterminer les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2 - \sqrt{5}$  et  $\lambda_3 = -2 + \sqrt{5}$ . On a

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -2x + 2y & = 0 \\ -2y + 2z & = 0 \\ -2x + 4y - 2z & = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x & = y \\ y & = z \\ -2x + 4y - 2z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Soit  $\lambda \in \{\lambda_2, \lambda_3\}$ . On sait donc que  $\dim(V_\lambda) = 1$ . On a :

$$V_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -(1+\lambda)x + 2y & = 0 \\ -(1+\lambda)y + 2z & = 0 \\ -2x + 4y - (1+\lambda)z & = 0 \end{cases} \right\}$$

Puisque

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -(1+\lambda)x + 2y & = 0 \\ -(1+\lambda)y + 2z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2y}{1+\lambda} \\ y \\ \frac{(1+\lambda)y}{2} \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda)}{2} \end{pmatrix}$$

et que  $\dim(V_\lambda) = 1$ , on obtient que

$$V_\lambda = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda)}{2} \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$V_{\lambda_2} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda_2} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda_2)}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{2}{-1-\sqrt{5}} \\ 1 \\ \frac{(-1-\sqrt{5})}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

et

$$V_{\lambda_3} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda_3} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda_3)}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \\ 1 \\ \frac{(-1+\sqrt{5})}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Soient D et P les matrices de  $\text{Mat}(3 \times 3)$  données par

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} \\ 1 & 3 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

On a donc que P est inversible et  $A = PDP^{-1}$ .

3. On calcule l'inverse  $P^{-1}$  de la matrice P. On utilise ici le Théorème 4. On a

$$\begin{aligned}
 \det(P) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} \\ 1 & 3 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 - \sqrt{5} & -3 + \sqrt{5} \\ 1 & 3 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 - \sqrt{5} & -3 + \sqrt{5} \\ 0 & 1 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 &= \det \begin{pmatrix} -3 - \sqrt{5} & -3 + \sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} = (-3 - \sqrt{5})(1 - \sqrt{5}) - (-3 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) \\
 &= 4\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

La comatrice  $\text{Com}(P)$  de P est donnée par

$$\begin{aligned}
 \text{Com}(P) &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 + \sqrt{5} \\ 1 & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & -1 - \sqrt{5} \\ 1 & 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & -4 + 2\sqrt{5} & 4 + 2\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & -1 - \sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} & -3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \text{Com}(P)^t = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -4 + 2\sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \\ 4 + 2\sqrt{5} & -1 - \sqrt{5} & -3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 A^n &= (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} \\ 1 & 3 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -4 + 2\sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \\ 4 + 2\sqrt{5} & -1 - \sqrt{5} & -3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda_2^n & 2\lambda_3^n \\ 1 & -(1 + \sqrt{5})\lambda_2^n & -(1 + \sqrt{5})\lambda_3^n \\ 1 & (3 + \sqrt{5})\lambda_2^n & (3 - \sqrt{5})\lambda_3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -4 + 2\sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \\ 4 + 2\sqrt{5} & -1 - \sqrt{5} & -3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### Exercice 4 - Quand trois moutons s'amuseent !

1. Notons  $M_1^n = (x_1^n, y_1^n)$ ,  $M_2^n = (x_2^n, y_2^n)$  et  $M_3^n = (x_3^n, y_3^n)$ . Par construction, on a que  $M_2^0$  est le milieu du segment  $M_1^0M_3^0$ . Ce qui se traduit, en termes de coordonnées, par

$$x_2^0 = \frac{x_1^0 + x_3^0}{2}, \quad y_2^0 = \frac{y_1^0 + y_3^0}{2},$$

i.e.  $x_1^1 = 2x_2^0 - x_3^0$  et  $y_1^1 = 2y_2^0 - y_3^0$ .

De même,  $M_3^0$  est le milieu du segment  $M_2^0M_1^0$ . Ce qui se traduit, en termes de coordonnées, par

$$x_3^0 = \frac{x_2^0 + x_1^0}{2}, \quad y_3^0 = \frac{y_2^0 + y_1^0}{2},$$

i.e.  $x_2^1 = 2x_3^0 - x_1^0$  et  $y_2^1 = 2y_3^0 - y_1^0$ .

Finalement,  $M_1^1$  est le milieu du segment  $M_3^1M_2^1$ . Ainsi

$$x_1^1 = \frac{x_3^1 + x_2^1}{2}, \quad y_1^1 = \frac{y_3^1 + y_2^1}{2},$$

i.e.  $x_3^1 = 2x_1^1 - x_2^1$  et  $y_3^1 = 2y_1^1 - y_2^1$ . En utilisant la formule pour  $x_1^1$  et  $y_1^1$  obtenue au-dessus, on a

$$x_3^1 = 2x_1^1 - x_2^1 = 2(2x_2^0 - x_3^0) - x_2^1 = -2x_1^0 + 4x_2^0 - x_3^0, \quad y_3^1 = -2y_1^0 + 4y_2^0 - y_3^0.$$

Ainsi, on a

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2^0 - x_3^0 \\ 2x_3^0 - x_1^0 \\ -2x_1^0 + 4x_2^0 - x_3^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = AX_0$$

et  $Y_1 = AY_0$ .

De la même manière, on voit facilement en appliquant le même raisonnement que  $X_{n+1} = AX_n$  et  $Y_{n+1} = AY_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. De la relation  $X_{n+1} = AX_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient que  $X_n = A^n X_0$ . De même, on a  $Y_n = A^n Y_0$ . En particulier, pour calculer  $A^n$ , on doit diagonaliser  $A$ . Les calculs ont déjà été fait dans l'exercice 3!
3. La méthode la plus directe : on a déjà calculé  $A^n$  dans l'exercice précédent. On peut aussi exprimer la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  comme combinaison linéaire des vecteurs propres  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .  
Notons

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \\ 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Il existe  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R}$  tels que

$$e_1 = a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3, \quad e_2 = a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3, \quad e_3 = a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3.$$

Les coefficients  $a_1, b_1, c_1$  sont donnés dans  $P^{-1}$ . En effet,

$$e_1 = a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3 \Leftrightarrow P \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Ainsi,

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & b_1 &= \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}, & c_1 &= \frac{4 + 2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}, \\ a_2 &= 1, & b_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}, & c_2 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}, \\ a_3 &= 1, & b_3 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}, & c_3 &= \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

A présent, on a

$$\begin{aligned} X_0 &= x_1^0 e_1 + x_2^0 e_2 + x_3^0 e_3 \\ &= x_1^0 (a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3) + x_2^0 (a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3) + x_3^0 (a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3) \\ &= \underbrace{(x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + x_3^0 a_3)}_{:=\alpha_1} v_1 + \underbrace{(x_1^0 b_1 + x_2^0 b_2 + x_3^0 b_3)}_{:=\alpha_2} v_2 \\ &\quad + \underbrace{(x_1^0 c_1 + x_2^0 c_2 + x_3^0 c_3)}_{:=\alpha_3} v_3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = A^n (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) \\ &= \alpha_1 A^n v_1 + \alpha_2 A^n v_2 + \alpha_3 A^n v_3 \\ &= \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \alpha_2 \lambda_2^n v_2 + \alpha_3 \lambda_3^n v_3 \\ &= \alpha_1 \lambda_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \lambda_2^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix} + \alpha_3 \lambda_3^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \\ 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_2^n + 2\alpha_3 \lambda_3^n \\ \alpha_1 - \alpha_2 (1 + \sqrt{5}) \lambda_2^n + \alpha_3 (-1 + \sqrt{5}) \lambda_3^n \\ \alpha_1 + \alpha_2 (3 + \sqrt{5}) \lambda_2^n + \alpha_3 (3 - \sqrt{5}) \lambda_3^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1^n &= \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_2^n + 2\alpha_3 \lambda_3^n \\ x_2^n &= \alpha_1 - \alpha_2 (1 + \sqrt{5}) \lambda_2^n + \alpha_3 (-1 + \sqrt{5}) \lambda_3^n \\ x_3^n &= \alpha_1 + \alpha_2 (3 + \sqrt{5}) \lambda_2^n + \alpha_3 (3 - \sqrt{5}) \lambda_3^n \end{cases}$$

On obtient exactement le même résultat pour  $y_1^n, y_2^n$  et  $y_3^n$  en fonction de  $y_1^0, y_2^0$  et  $y_3^0$ .

4. On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_2^n = \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_3^n = 0$ . Ainsi, si on veut que les moutons sautent dans un domaine borné, il faut que  $\alpha_2 = 0$ . Or

$$\alpha_2 = (x_1^0 b_1 + x_2^0 b_2 + x_3^0 b_3) = \frac{1}{4\sqrt{5}} \left( (-4 + 2\sqrt{5})x_1^0 + (1 - \sqrt{5})x_2^0 + (3 - \sqrt{5})x_3^0 \right).$$

Ainsi, il suffit de prendre  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0$  et  $y_3^0$  qui vérifient

$$(-4 + 2\sqrt{5})x_1^0 + (1 - \sqrt{5})x_2^0 + (3 - \sqrt{5})x_3^0 = 0, \quad (-4 + 2\sqrt{5})y_1^0 + (1 - \sqrt{5})y_2^0 + (3 - \sqrt{5})y_3^0 = 0.$$

On peut donner une interprétation géométriques des positions initiales des moutons  $M_1^0, M_2^0$  et  $M_3^0$  en utilisant la notion de barycentre. Pour ceux qui ont déjà vu cette notion, essayez de voir ce que l'on obtient !



**BAAaaaaaaa!**